2 階楕円型方程式に対する $W^{1,\infty}$ 誤差評価の復習

T. Kemmochi

2019 年 9 月 28 日

このノートの目的

Brenner-Scott [1] の Chapter 8 に書かれている, FEM に対する $W^{1,\infty}$ 評価の証明をフォローする．このノートでは, [BS: ***] と書いたら, [1] の *** の内容であることを意味する．

1　問題, 仮定, 定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$ を有界**多角形**領域とする．このとき, 次の Poisson 方程式を考える:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

次に, (1.1) の有限要素近似を考える．$\mathcal{T}_h$ を Ω の三角形分割, $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ を適合 P^1 要素とする．$u_h \in V_h$ は, 次を満たすとする:

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h), \qquad \forall v_h \in V_h.$$

次を仮定する [BS: 式 (8.1.3)].

仮定 1. 次を満たす $\mu > N$ が存在する: 任意の $p \in (1, \mu)$ に対して,

$$\|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C\|\Delta v\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \forall v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

このとき, 次を示す [BS: Theorem (8.1.11)].

定理 1. (1.1) の解 u が $u \in W^{1,\infty}$ であるとする．このとき,

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \inf_{v_h \in V_h} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{1.2}$$

が成り立つ.

2　準備

2.1　正則化デルタ/Green 関数

$y \in \Omega_h$, $y \in T_y \in \mathcal{T}_h$ を固定し, $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_y \in C_0^\infty(T_y)$ を正則化デルタ関数とする [BS: 式 (8.2.1)]．$\tilde{\delta}$ は次を満たす:

$$\|\nabla^k \tilde{\delta}\|_{L^p(T_y)} \le C h^{-k-\frac{N}{p'}}.$$

このとき, 正則化 Green 関数 g を

$$\begin{cases} -\Delta g = \partial\tilde{\delta}, & \text{in } \Omega, \\ g = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の解として定める. ただし, ∂ は任意の 1 階偏微分である. さらに, g の有限要素近似 $g_h \in V_h$ を,

$$(\nabla v_h, \nabla g_h) = (v_h, \partial\tilde{\delta}), \qquad \forall v_h \in V_h$$

の解として定める.

2.2 重み関数

上で固定した y に対して, 重み関数 σ を次で定義する [BS: 式 (8.1.4)–(8.1.6)]:

$$\sigma(x) \coloneqq \sqrt{|x-y|^2 + \theta^2}.$$

ただし, $\theta = \kappa h$ であり, $\kappa \geq 1$ はあとで h と y に依存しないように大きく取る.

このとき, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty]$ に対して,

$$\begin{aligned} \|\sigma^\alpha\|_{L^p(\Omega)} &\leq C\theta^{\alpha+\frac{N}{p}}, \qquad \text{if } \alpha + \frac{N}{p} < 0, \qquad (2.1) \\ \left\|\sigma^\alpha \nabla^k \tilde{\delta}\right\|_{L^p(T_z)} &\leq C\kappa^\alpha h^{\alpha-k-\frac{N}{p'}}, \\ |\nabla^k(\sigma^\alpha)| &\leq C_{k,\alpha}\sigma^{\alpha-k}, \\ \frac{\max_T \sigma^\alpha}{\min_T \sigma^\alpha} &\leq C_\alpha, \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h \qquad (2.2) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\nabla^k f$ は f の k 階導関数からなる k 階テンソルで, 絶対値は Frobenius ノルムである.

2.3 重み付き super approximation 型評価

I_h を Lagrange 補間作用素とするとき, 次が成り立つ [BS: 式 (8.3.4)].

補題 1. $\alpha \in \mathbb{R}$, $v_h \in V_h$ に対して,

$$\left\|\sigma^{-\alpha}\nabla\left[\sigma^{2\alpha}v_h - I_h\left(\sigma^{2\alpha}v_h\right)\right]\right\|_\Omega \leq C\|\sigma^{\alpha-1}v_h\|_\Omega \qquad (2.3)$$

が成り立つ.

証明. 各三角形 $T in \mathcal{T}_h$ ごとに, (2.2) と $\nabla^2 v_h|_T \equiv 0$, および逆不等式により,

$$\begin{aligned} \left\|\sigma^{-\alpha}\nabla\left[\sigma^{2\alpha}v_h - I_h\left(\sigma^{2\alpha}v_h\right)\right]\right\|_T &\leq \left(\sup_T \sigma^{-\alpha}\right) Ch\|\nabla^2(\sigma^{2\alpha}v_h)\|_T \\ &\leq \left(\sup_T \sigma^{-\alpha}\right) Ch\left(\|\sigma^{2\alpha-1}\nabla v_h\|_T + \|\sigma^{2\alpha-2}v_h\|_T\right) \\ &\leq \frac{\sup_T \sigma^{-\alpha}}{\inf_T \sigma^{-\alpha}} Ch\left(\|\sigma^{\alpha-1}\nabla v_h\|_T + \|\sigma^{\alpha-2}v_h\|_T\right) \\ &\leq Ch\left(h^{-1} + \theta^{-1}\right)\|\sigma^{\alpha-1}v_h\|_T \\ &\leq C\|\sigma^{\alpha-1}v_h\|_T \end{aligned}$$

である. T について足し合わせれば, (2.3) を得る. □

3　定理 1 の証明の流れ

■ **Step 1: 重み付き H^1 誤差評価への帰着.**　固定された点 y に対して, 次が成り立つ:

$$|\partial(u-u_h)(y)| \le C\|\nabla(u-v_h)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big(1+\theta^{-\alpha+\frac{N}{2}}\|\sigma^\alpha\nabla(g-g_h)\|_\Omega\Big) \tag{A}$$

したがって, 次の評価を示せば良いということになる.

$$\|\sigma^\alpha\nabla(g-g_h)\|_\Omega \le C\theta^{\alpha-\frac{N}{2}} \tag{B}$$

■ **Step 2: 重み付き H^1 誤差評価.**　Lagrange 補間作用素を I_h とおくとき, (B) の左辺は, 次のように評価できる:

$$\|\sigma^\alpha\nabla(g-g_h)\|_\Omega \le C\|\sigma^{\alpha-1}(g-g_h)\|_\Omega + C\|\sigma^\alpha\nabla(g-I_hg)\|_\Omega + C\|\sigma^{\alpha-1}(g-I_hg)\|_\Omega \tag{C}$$

■ **Step 3: 重み付き補間誤差評価.**　(C) の右辺の後ろ 2 項は, g に対する重み付きの補間誤差評価であるが, 実はこれらは次のように評価できる:

$$\|\sigma^\alpha\nabla(g-I_hg)\|_\Omega + \|\sigma^{\alpha-1}(g-I_hg)\|_\Omega \le C_\kappa\theta^{\alpha-\frac{N}{2}} \tag{D}$$

■ **Step 4: 重み付き L^2 誤差評価.**　(C) の右辺の第 1 項は, 次のように評価できる:

$$\|\sigma^{\alpha-1}(g-g_h)\|_\Omega \le C\kappa^{-1/2}\|\sigma^\alpha\nabla(g-g_h)\|_\Omega \tag{E}$$

■ **Step 5: 証明の完成.**　(C) に (D) と (E) を代入すると,

$$\|\sigma^\alpha\nabla(g-g_h)\|_\Omega \le C_\kappa\theta^{\alpha-\frac{N}{2}} + C\kappa^{-1/2}\|\sigma^\alpha\nabla(g-g_h)\|_\Omega$$

が成り立つ. よって, κ を十分大きく取れば, (B) が成り立つ. したがって, (A) により, $W^{1,\infty}$ 誤差評価を得る.

以下, (A) から (E) の証明を詳しく見る.

4　定理 1 の証明

4.1　Step 1: 重み付き H^1 誤差評価への帰着 [BS: Section 8.2]

固定された点 y と任意の $v_h \in V_h$ に対して,

$$\begin{aligned}\partial(u-u_h)(y) &= \partial(u-v_h)(y) + (\partial(v_h-u_h),\tilde{\delta}) \\ &= \partial(u-v_h)(y) + (\partial(v_h-u),\tilde{\delta}) + (\partial(u-u_h),\tilde{\delta}) \\ &\le C\|\nabla(u-v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} + |(\partial(u-u_h),\tilde{\delta})| \end{aligned} \tag{4.1}$$

である. さらに,

$$(\partial(u-u_h),\tilde{\delta}) = -(u-u_h,\partial\tilde{\delta}) = -(u-u_h,-\Delta g)$$

$$
\begin{aligned}
&= -(\nabla(u-u_h), \nabla g) = -(\nabla(u-u_h), \nabla(g-g_h)) \\
&= -(\nabla(u-v_h), \nabla(g-g_h)) \le \|\nabla(u-v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla(g-g_h)\|_{L^1(\Omega)}
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

である．したがって, (4.1), (4.2) により,

$$
|\partial(u-u_h)(y)| \le C\|\nabla(u-v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \big(1 + \|\nabla(g-g_h)\|_{L^1(\Omega)}\big) \tag{4.3}
$$

を得る．さらに, $\alpha > N/2$ に対して,

$$
\|\nabla(g-g_h)\|_{L^1(\Omega)} \le \|\sigma^{-\alpha}\|_\Omega \|\sigma^\alpha \nabla(g-g_h)\|_\Omega \le C\theta^{-\alpha+\frac{N}{2}} \|\sigma^\alpha \nabla(g-g_h)\|_\Omega
$$

なので, (4.3) に代入して,

$$
|\partial(u-u_h)(y)| \le C\|\nabla(u-v_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \Big(1 + \theta^{-\alpha+\frac{N}{2}} \|\sigma^\alpha \nabla(g-g_h)\|_\Omega\Big) \tag{4.4}
$$

となる．

したがって, 次を示せばよいということがわかった [BS: Lemma 8.2.6].

補題 2. 適切な $\alpha > N/2$ と十分大きな κ に対して,

$$
\|\sigma^\alpha \nabla(g-g_h)\|_\Omega \le C\theta^{\alpha-\frac{N}{2}} \tag{4.5}
$$

が成り立つ．ただし,C は h, y には依存しない定数である．

4.2 Step 2: 重み付き H^1 誤差評価 [BS: Proposition 8.3.1]

以下, $e = g - g_h$, $z = g - I_h g$, $z_h = I_h g - g_h$ とおく [BS: z_h が BS でいう $\tilde{e}$]．このとき, 次が成り立つ [BS: Proposition 8.3.1].

補題 3. 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し,

$$
\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega \le C\|\sigma^{\alpha-1} e\|_\Omega + C\|\sigma^\alpha \nabla z\|_\Omega + C\|\sigma^{\alpha-1} z\|_\Omega \tag{4.6}
$$

が成り立つ．

証明. $e = z + z_h$ であることに注意すると,

$$
\begin{aligned}
\|\sigma^\alpha \nabla e\|^2 &= (\sigma^{2\alpha}\nabla e, \nabla e) \\
&= (\sigma^{2\alpha}\nabla z_h, \nabla e) + (\sigma^{2\alpha}\nabla z, \nabla e) \\
&= (\nabla(\sigma^{2\alpha} z_h), \nabla e) - (\nabla(\sigma^{2\alpha}) z_h, \nabla e) + (\sigma^{2\alpha}\nabla z, \nabla e) \\
&=: I_1 + I_2
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

と計算できる．ただし,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= (\nabla(\sigma^{2\alpha}\nabla z_h), \nabla e) \\
I_2 &= -(\nabla(\sigma^{2\alpha}) z_h, \nabla e) + (\sigma^{2\alpha}\nabla z, \nabla e)
\end{aligned}
$$

である．

Galerkin 直交性により, 任意の $\chi \in V_h$ に対して

$$I_1 = (\nabla(\sigma^{2\alpha} z_h - \chi), \nabla e)$$

であるから, $\chi = I_h(\sigma^{2\alpha} z_h)$ ととれば [BS: p.220 の ψ], 補題 1 により,

$$I_1 \le \|\sigma^{-\alpha}\nabla(\sigma^{2\alpha} z_h - \chi)\|_\Omega \|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega \le C\|\sigma^{\alpha-1} z_h\|_\Omega \|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega$$

である. よって, $z_h = e - z$ にも注意すると,

$$I_1 \le \frac{1}{4}\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega^2 + C\|\sigma^{\alpha-1} e\|_\Omega^2 + C\|\sigma^{\alpha-1} z\|_\Omega^2 \tag{4.8}$$

を得る. 次に, I_2 の評価だが, これは易しくて, Young の不等式により,

$$\begin{aligned} I_2 &\le C\|\sigma^{\alpha-1} z_h\|_\Omega \|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega + \|\sigma^\alpha \nabla z\|_\Omega \|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega \\ &\le \frac{1}{4}\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega^2 + C\|\sigma^{\alpha-1} e\|_\Omega^2 + C\|\sigma^\alpha \nabla z\|_\Omega^2 + C\|\sigma^{\alpha-1} z\|_\Omega^2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

よって, (4.7) に (4.8), (4.9) を代入して,

$$\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega^2 \le \frac{1}{2}\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega^2 + C\|\sigma^{\alpha-1} e\|_\Omega^2 + C\|\sigma^\alpha \nabla z\|_\Omega^2 + C\|\sigma^{\alpha-1} z\|_\Omega^2$$

となるので, これより (4.6) を得る. □

4.3 Step 3: 重み付き補間誤差評価 [BS: 式 (8.3.10), Lemma (8.3.11), Section 8.4]

式 (4.6) の右辺の z に関する項を評価する.

補題 4. 適切な $\alpha > N/2$ に対して,

$$\|\sigma^\alpha \nabla z\|_\Omega + \|\sigma^{\alpha-1} z\|_\Omega \le C_\kappa \theta^{\alpha - \frac{N}{2}} \tag{4.10}$$

が成り立つ.

証明. 各三角形 $T \in \mathcal{T}_h$ ごとに, (2.2) により,

$$\begin{aligned} \|\sigma^\alpha \nabla z\|_T &\le C\left(\sup_T \sigma^\alpha\right) h \|\nabla^2 g\|_T \\ &\le C\frac{\sup_T \sigma^\alpha}{\inf_T \sigma^\alpha} h \|\sigma^\alpha \nabla^2 g\|_T \\ &\le Ch\|\sigma^\alpha \nabla^2 g\|_T \end{aligned}$$

が成り立つ. 同様に, $h \le \sigma$ により,

$$\|\sigma^{\alpha-1} z\|_T \le Ch^2 \|\sigma^{\alpha-1}\nabla^2 g\|_T \le Ch\|\sigma^\alpha \nabla^2 g\|_T$$

である. よって,

$$\|\sigma^\alpha \nabla z\|_\Omega + \|\sigma^{\alpha-1} z\|_\Omega \le Ch\|\sigma^\alpha \nabla^2 g\|_\Omega \tag{4.11}$$

である. そこで, $\|\sigma^\alpha \nabla^2 g\|_\Omega$ を評価する.

積の微分により,

$$\|\sigma^\alpha \nabla^2 g\|_\Omega \le \|\nabla^2(\sigma^\alpha g)\|_\Omega + C\|\sigma^{\alpha-1}\nabla g\|_\Omega + C\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega \tag{4.12}$$

である．まずは $\|\nabla^2(\sigma^\alpha g)\|_\Omega$ を評価する．$\sigma^\alpha g$ の満たす方程式を考えると,

$$-\Delta(\sigma^\alpha g) = \sigma^\alpha \partial\tilde{\delta} - 2\nabla(\sigma^\alpha)\cdot\nabla g - \Delta(\sigma^\alpha) g$$

なので, 楕円型 H^2 正則性 (仮定 1) により,

$$\|\nabla^2(\sigma^\alpha g)\|_\Omega \le C\|\sigma^\alpha\partial\tilde{\delta}\|_\Omega + C\|\sigma^{\alpha-1}\nabla g\|_\Omega + C\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega$$

である．これを (4.12) に代入すると, (2.1) にも注意して,

$$\|\sigma^\alpha \nabla^2 g\|_\Omega \le C_\kappa \theta^{\alpha-\frac{N}{2}-1} + C\|\sigma^{\alpha-1}\nabla g\|_\Omega + C\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega \tag{4.13}$$

となる．

次に, $\|\sigma^{\alpha-1}\nabla g\|_\Omega$ を考える．再び積の微分により,

$$\|\sigma^{\alpha-1}\nabla g\|_\Omega \le \|\nabla(\sigma^{\alpha-1} g)\|_\Omega + C\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega \tag{4.14}$$

である．今度は $\sigma^{\alpha-1} g$ の満たす方程式を考えると

$$-\Delta(\sigma^{\alpha-1} g) = \sigma^{\alpha-1}\partial\tilde{\delta} - 2\nabla(\sigma^{\alpha-1})\cdot\nabla g - \Delta(\sigma^{\alpha-1}) g$$

なので, これに $\sigma^{\alpha-1}$ をかけて積分すると,

$$\begin{aligned}\|\nabla(\sigma^{\alpha-1} g)\|_\Omega^2 &\le \|\sigma^\alpha\partial\tilde{\delta}\|_\Omega \|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega + C\|\sigma^{\alpha-1}\nabla g\|_\Omega\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega + C\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega^2 \\ &\le \frac{1}{2}\|\sigma^{\alpha-1}\nabla g\|_\Omega^2 + C\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega^2 + C\|\sigma^\alpha\partial\tilde{\delta}\|_\Omega^2\end{aligned}$$

となる．これを (4.14) に代入すると,

$$\|\sigma^{\alpha-1}\nabla g\|_\Omega \le C\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega + C\|\sigma^\alpha\partial\tilde{\delta}\|_\Omega \le C\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega + C_\kappa\theta^{\alpha-\frac{N}{2}-1}$$

を得る [BS: 式 (8.4.3)]．これを (4.13) に代入すれば,

$$\|\sigma^\alpha \nabla^2 g\|_\Omega \le C_\kappa \theta^{\alpha-\frac{N}{2}} + C\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega \tag{4.15}$$

を得る．

最後に $\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega$ を評価する．Hölder の不等式により, 任意の $p>1$ に対して

$$\|\sigma^{\alpha-2} g\|_\Omega \le \|\sigma^{\alpha-2}\|_{L^{2p'}(\Omega)}\|g\|_{L^{2p}(\Omega)} \tag{4.16}$$

である．もし

$$\alpha - 2 + \frac{N}{2p'} < 0 \tag{4.17}$$

ならば,

$$\|\sigma^{\alpha-2}\|_{L^{2p'}(\Omega)} \le C_\kappa \theta^{\alpha-2+\frac{N}{2p'}}$$

となる．$\|g\|_{L^{2p}(\Omega)}$ の方は duality argument で評価する．まず,

$$\|g\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} = (|g|^{2p-2} g, g)$$

に注意して, 次の双対問題を考える:

$$\begin{cases} -\Delta w = |g|^{2p-2}g, & \text{in } \Omega, \\ w = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

このとき, $(2p)' < 2$ に注意すると, 仮定 1 により,

$$\|w\|_{W^{2,(2p)'}(\Omega)} \le C\||g|^{2p-2}g\|_{L^{(2p)'}(\Omega)} = C\|g\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p-1} \tag{4.18}$$

が成り立つ. この w に対して,

$$\|g\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} = (-\Delta w, g) = (w, -\Delta g) = (w, \partial\tilde{\delta}) = (-\partial w, \tilde{\delta}) \le \|\nabla w\|_{L^q(\Omega)} Ch^{-\frac{N}{q}} \tag{4.19}$$

となる ($q \in [1, \infty]$). q を,

$$1 - \frac{N}{(2p)'} = -\frac{N}{q}$$

を満たすように取ると, ($(2p)' < 2 \le N$ なので取れる) Sobolev 不等式と (4.18) により,

$$\|\nabla w\|_{L^q(\Omega)} \le C\|w\|_{W^{2,(2p)'}} \le C\|g\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p-1} \tag{4.20}$$

が成り立つ. よって, (4.19), (4.20) により,

$$\|g\|_{L^{2p}(\Omega)} \le Ch^{-\frac{N}{q}} = Ch^{1-\frac{N}{(2p)'}}$$

となるので, (4.16) に代入すると, (4.17) の下で,

$$\|\sigma^{\alpha-2}g\|_\Omega \le C_\kappa \theta^{\alpha-2+\frac{N}{2p'}} h^{1-\frac{N}{(2p)'}} = C_\kappa \theta^{\alpha-1+\frac{N}{2p'}-\frac{N}{(2p)'}}$$

を得る. 指数をもう少し計算すると,

$$\frac{N}{2p'} - \frac{N}{(2p)'} = \frac{N}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right) - N\left(1 - \frac{1}{2p}\right) = -\frac{N}{2}$$

なので, 結局,

$$\|\sigma^{\alpha-2}g\|_\Omega \le C_\kappa \theta^{\alpha-\frac{N}{2}-1} \tag{4.21}$$

を得る. (4.11), (4.15), (4.21) により, (4.17) が成り立つならば, 欲しい評価 (4.10) が成り立つ.

指数の条件 (4.17) を確認する. $\alpha = \frac{N}{2} + \lambda$ ($\lambda > 0$) とおくと, 条件は

$$\frac{N}{2} + \lambda - 2 + \frac{N}{2} - \frac{N}{2p} < 0,$$

すなわち,

$$\lambda < 2 - N + \frac{N}{2p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & (N = 2), \\ \dfrac{3}{2p} - 1, & (N = 3) \end{cases}$$

となるので, $N = 2$ のときは任意の $p \in (1, \infty)$ に対して (4.17) が成り立つような α が存在し, $N = 3$ のときは, $p > 3/2$ ならば同様の α が存在する. 結局, 適切に p を選んでおけば, うまく α を選ぶことで, 上の議論が正当化され, 補題 4 の証明が終わる. □

4.4 Step 4: 重み付き L^2 誤差評価 [BS: Proposition 8.3.5, Lemma 8.3.7]

式 (4.6) の右辺の $\|\sigma^{\alpha-1}e\|_\Omega$ を評価する [BS: Proposition 8.3.5].

補題 5. 適切な $\alpha > N/2$ に対して,

$$\|\sigma^{\alpha-1}e\|_\Omega \leq C\kappa^{-1/2}\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega \tag{4.22}$$

が成り立つ.

証明. これも duality argument で示す. まず,

$$\|\sigma^{\alpha-1}e\|_\Omega^2 = (\sigma^{2\alpha-2}e, e)$$

に注意して, 次の双対問題を考える:

$$\begin{cases} -\Delta w = \sigma^{2\alpha-2}e, & \text{in } \Omega, \\ w = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

このとき,

$$\|\sigma^{\alpha-1}e\|_\Omega^2 = (-\Delta w, e) = (\nabla w, \nabla e) = (\nabla(w - I_h w), \nabla e)$$

が成り立つ. よって,

$$\|\sigma^{\alpha-1}e\|_\Omega^2 \leq \|\sigma^{-\alpha}\nabla(w - I_h w)\|_\Omega \|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega \tag{4.23}$$

である.

$\|\sigma^{-\alpha}\nabla(w - I_h w)\|_\Omega$ を評価する [BS: Lemma 8.3.7]. Hölder の不等式により, $p \in [1, \infty]$ に対し,

$$\|\sigma^{-\alpha}\nabla(w - I_h w)\|_\Omega \leq \|\sigma^{-\alpha}\|_{L^{2p'}(\Omega)}\|\nabla(w - I_h w)\|_{L^{2p}(\Omega)}$$

である. いま, $\alpha > N/2$ により,

$$-\alpha + \frac{N}{2p'} = -\alpha + \frac{N}{2} - \frac{N}{2p} < 0$$

なので,

$$\|\sigma^{-\alpha}\nabla(w - I_h w)\|_\Omega \leq Ch\theta^{-\alpha + \frac{N}{2p'}}\|\nabla^2 w\|_{L^{2p}(\Omega)} \tag{4.24}$$

である. もし $2p < \mu$ なら, 仮定 1 により

$$\|\nabla^2 w\|_{L^{2p}(\Omega)} \leq C\|\sigma^{2\alpha-2}e\|_{L^{2p}(\Omega)} \tag{4.25}$$

である. さらに, もし

$$1 - \frac{N}{q} = -\frac{N}{2p} \tag{4.26}$$

を満たす $q \geq 1$ が存在するなら, Sobolev の不等式と Poincaré の不等式により,

$$\begin{aligned} \|\sigma^{2\alpha-2}e\|_{L^{2p}(\Omega)} &\leq C\|\nabla\big(\sigma^{2\alpha-2}e\big)\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq C\big(\|\sigma^{2\alpha-2}\nabla e\|_{L^q(\Omega)} + \|\sigma^{2\alpha-3}e\|_{L^q(\Omega)}\big) \end{aligned} \tag{4.27}$$

が成り立つ．さらに, $q \le 2$ ならば,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \tag{4.28}$$

なる r に対して,

$$\|\sigma^{2\alpha-2}\nabla e\|_{L^q(\Omega)} + \|\sigma^{2\alpha-3}e\|_{L^q(\Omega)} \le \|\sigma^{\alpha-2}\|_{L^r(\Omega)}\bigl(\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega + \|\sigma^{\alpha-1}e\|_\Omega\bigr) \tag{4.29}$$

が成り立つ．したがって, もし

$$\alpha - 2 + \frac{N}{r} < 0 \tag{4.30}$$

ならば, (4.27), (4.29) により,

$$\|\sigma^{2\alpha-2}e\|_{L^{2p}(\Omega)} \le C\theta^{\alpha-2+\frac{N}{r}}\bigl(\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega + \|\sigma^{\alpha-1}e\|_\Omega\bigr) \tag{4.31}$$

が成り立つ．よって, (4.24), (4.25), (4.31) により,

$$\|\sigma^{-\alpha}\nabla(w - I_h w)\|_\Omega \le Ch\theta^{-\alpha+\frac{N}{2p'}}\theta^{\alpha-2+\frac{N}{r}}\bigl(\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega + \|\sigma^{\alpha-1}e\|_\Omega\bigr)$$

となる．指数を計算すると, (4.26), (4.28) により,

$$\begin{aligned}\left(-\alpha + \frac{N}{2p'}\right) + \left(\alpha - 2 + \frac{N}{r}\right) &= \frac{N}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right) - 2 + N\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)\\ &= -\frac{N}{2p} - 2 + \frac{N}{q}\\ &= -\frac{N}{2p} - 2 + \left(1 + \frac{N}{2p}\right)\\ &= -1\end{aligned}$$

となっている．結局,

$$\begin{aligned}\|\sigma^{-\alpha}\nabla(w - I_h w)\|_\Omega &\le Ch\theta^{-1}\bigl(\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega + \|\sigma^{\alpha-1}e\|_\Omega\bigr)\\ &= C\kappa^{-1}\bigl(\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega + \|\sigma^{\alpha-1}e\|_\Omega\bigr)\end{aligned}$$

が成り立つので, これを (4.23) に代入すれば, Young の不等式により欲しい評価 (4.22) を得る．

以上の議論において後回しにした条件を確認しておく．満たされるべき条件は, (4.30) と, $2p < \mu$, $1 \le q \le 2$ である．まず, $1 \le q \le 2$ から考える．(4.26) により,

$$\frac{N}{2} \le 1 + \frac{N}{2p} \le N$$

であるから,

$$\frac{N}{N-1} \le 2p \le \frac{2N}{N-2}$$

が $1 \le q \le 2$ と同値な条件である．次に, (4.30) を考える．上と同様に計算すると,

$$\alpha - 2 + \frac{N}{r} = \alpha - \frac{N}{2} - 1 + \frac{N}{2p}$$

である．いま, $\alpha > N/2$ なので, (4.30) が成り立つためには, $2p > N$ が必要である．したがって, $N \ge N/(N-1)$ に注意すると,

$$N < 2p < \min\left\{\mu, \frac{2N}{N-2}\right\} \tag{4.32}$$

となるように p を選んでおけば, すべての条件を満たす α を選ぶことができ, 上の議論が正当化され, (4.22) の証明が終わる. □

注意 1. 上の証明の最後で見たように, この議論のためには $2p > N$ が必要条件である. したがって, 仮定 1 の μ は $\mu > N$ でなければならない.

また, (4.32) が成り立つには, $N < 2N/(N-2)$ が必要条件である. これは $N < 4$ と同値なので, 4 次元以上でも上の議論はできない.

4.5 Step 5: 証明の完成

ここまで来ると, 補題 2 はすぐに示せる.

補題 2 の証明. 式 (4.6) に (4.10) と (4.22) を代入すると,

$$\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega \le C\kappa^{-1/2}\|\sigma^\alpha \nabla e\|_\Omega + C\theta^{\alpha - \frac{N}{2}}$$

となる. したがって, κ を大きく取れば, (4.5) を得る. よって, (4.4) により, $W^{1,\infty}$ 誤差評価 (1.2) の証明が終わる. □

参考文献

[1] S. C. Brenner and L. R. Scott. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Third Edition, Springer, 2007.